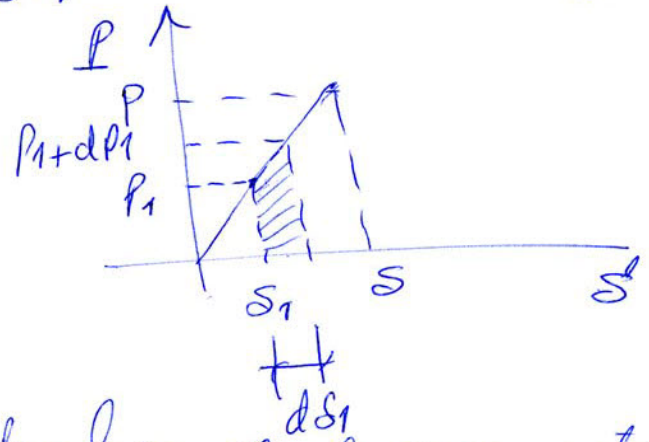
ENERGÍA DE DEFORMACIÓN INTERNA DEBIDA AL ESFZO AXIL

a) Trabajo Externo (W)

Suponiendo un material linealmente elástico (acero)



$$dW = (P_1 + dP_1)\, d\delta_1$$

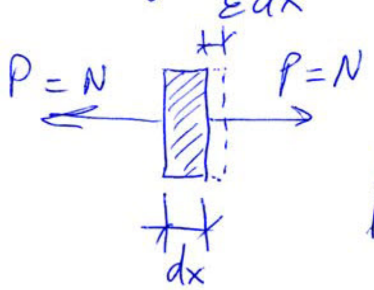
$$\int dW = \int P_1 \cdot d\delta_1 + \underbrace{dP_1 \int d\delta_1}_{\to 0}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} P \delta}$$

Para el caso de las cargas, activas y reactivas, actuando en una estructura:

$$\boxed{W = \sum \frac{1}{2} P_i \delta_i}$$

b) Energía Interna



$$dU_i = \frac{1}{2} N \cdot \varepsilon\, dx$$

Por definición $\varepsilon = \dfrac{N}{E\Omega}$

$$\int dU_i = \frac{1}{2} \int N \cdot \frac{N}{E\Omega}\, dx$$

Si $N = cte.$

$$U_i = \frac{1}{2} \frac{N^2 L}{E\Omega}$$

Generalizando, para toda la estructura $\boxed{U_i = \sum \frac{1}{2} \frac{N^2 L}{E\Omega}}$

Ejercicio

Si se sabe que la deformación de una barra viene definida por la expresión:

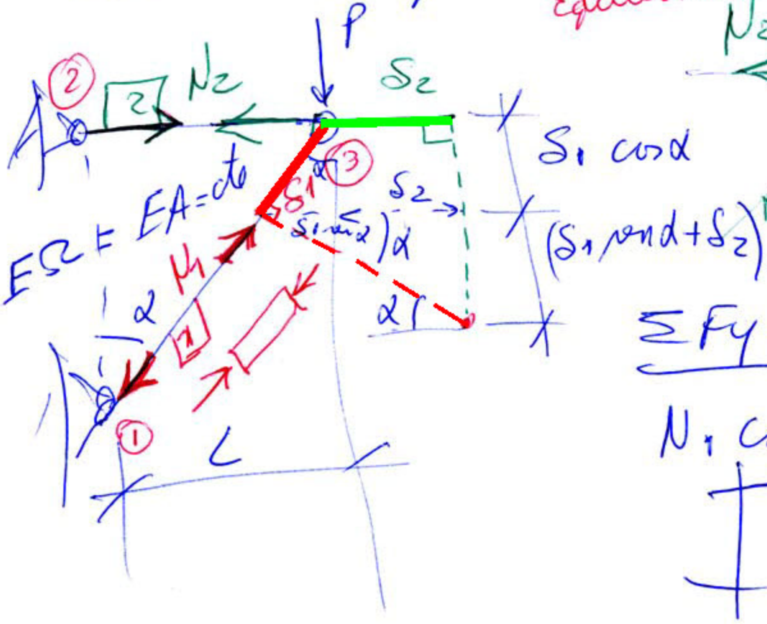
$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

$P = N =$ Esfuerzo axil en la barra

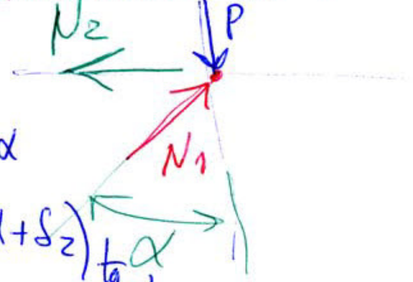
$L =$ Longitud de la barra

$E =$ módulo de elasticidad del material de la barra

$A =$ área de la sección transversal de la barra, se pide demostrar que $W = \Delta U_i$:



Equilibrio nudo ②:



$\Sigma F_y = 0$

$N_1 \cos\alpha - P = 0$

$$\boxed{N_1 = \frac{P}{\cos\alpha}}$$

$\Sigma F_x = 0$

$-N_2 + N_1 \operatorname{sen}\alpha = 0$

$-N_2 + \frac{P}{\cos\alpha} \operatorname{sen}\alpha = 0$

$$\boxed{N_2 = P \operatorname{tg}\alpha}$$

$$v_3 = \delta_1 \cos\alpha + (\delta_1 \operatorname{sen}\alpha + \delta_2) \operatorname{tg}\alpha$$

$$v_3 = \delta_1 \cos\alpha + \delta_1 \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} + \delta_2 \operatorname{tg}\alpha$$

$$\boxed{v_3 = \frac{\delta_1(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)}{\cos\alpha} + \delta_2 \operatorname{tg}\alpha = \frac{\delta_1}{\cos\alpha} + \delta_2 \operatorname{tg}\alpha}$$

$$W_e = W = \frac{1}{2} P v_3$$

$$W_e = W = \frac{1}{2}\left[P \cdot \frac{\delta_1}{\cos\alpha} + P\delta_2 \operatorname{tg}\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{P}{\cos\alpha} \cdot \frac{N_1 \cdot L}{E\Omega \cdot \sin\alpha} + P\operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{N_2 \cdot L}{E\Omega}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{P \cdot N_1 \cdot L}{E\Omega \sin\alpha \cos\alpha} + \frac{P N_2 L}{E\Omega} \cdot \operatorname{tg}\alpha\right]$$

$$= \frac{PL}{2E\Omega \sin\alpha\cos\alpha} \times \frac{P}{\cos\alpha} + \frac{PL}{2E\Omega} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot P\operatorname{tg}\alpha$$

$$= \frac{P^2L}{2E\Omega} \times \frac{1}{\sin\alpha\cos^2\alpha} + \frac{P^2L \operatorname{tg}^2\alpha}{2E\Omega}$$

$$W_e = W = \frac{P^2L}{2E\Omega}\left[\frac{1}{\sin\alpha\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha\right]$$

$$U_i = \sum \frac{1}{2}\frac{N_i^2 L}{E\Omega} = \frac{1}{2E\Omega}\left(\frac{P^2}{\cos^2\alpha} \times \frac{L}{\sin\alpha} + P^2\operatorname{tg}^2\alpha \cdot L\right]$$

$$U_i = \frac{P^2L}{2E\Omega}\left[\frac{1}{\sin\alpha\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha\right]$$