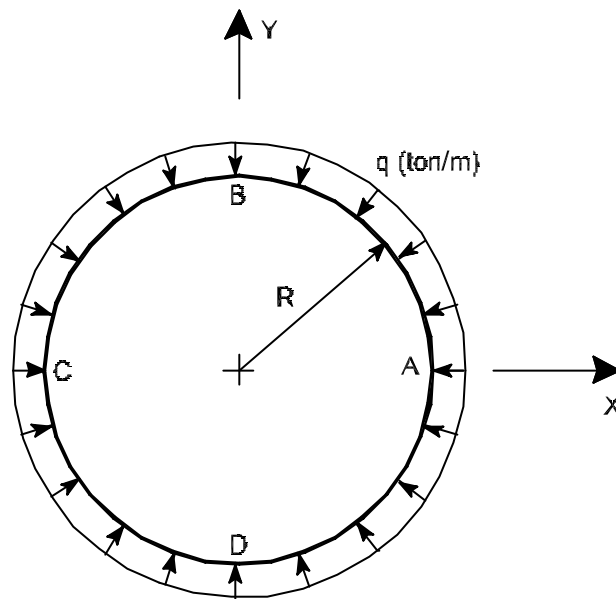


EJERCICIO N° 4 - G7

En la estructura que se muestra, y sin tener en cuenta las deformaciones debidas a los esfuerzos cortante y axil, se pide :

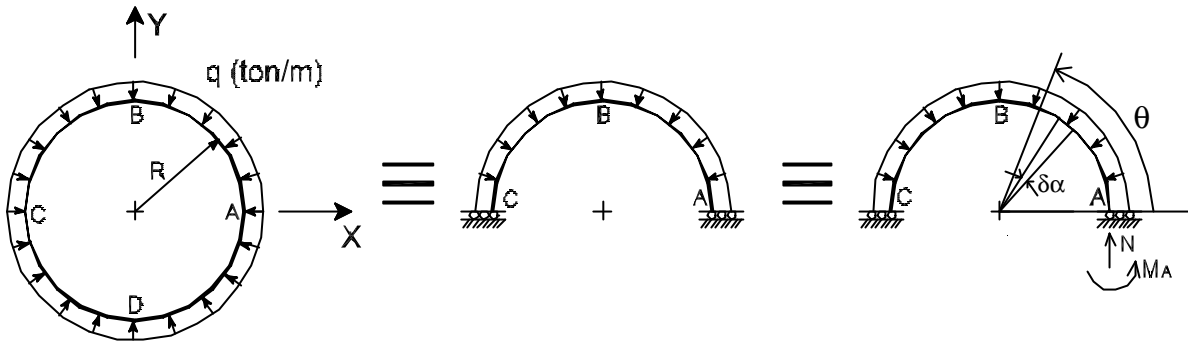
- Evaluar, analíticamente, los valores del **momento flector** y **axil** en el punto **A**.
- Dibujar los diagramas de esfuerzo axil y momento flector de toda la estructura, indicando sus valores en los puntos más significativos.



EI = Constante en toda la estructura

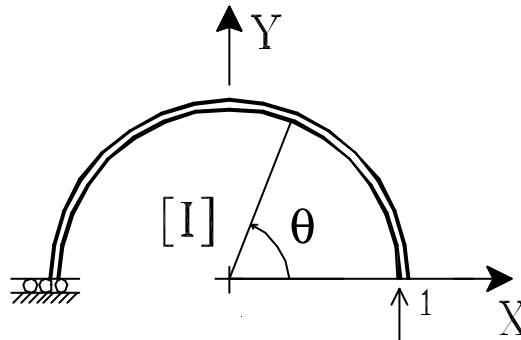
SOLUCION

a)

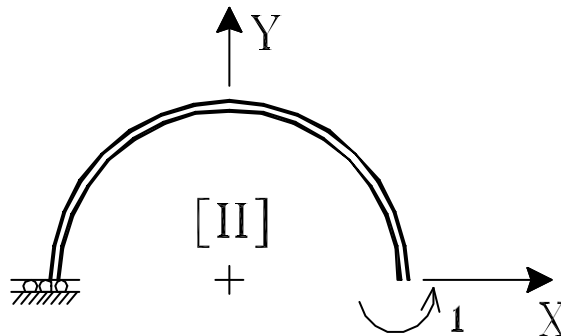


Aplicando Castigliano:

$$v_A = \int M \times M' \frac{dS}{EI} = 0 \quad (1)$$



$$q_A = \int M \times M'' \frac{dS}{EI} = 0 \quad (2)$$



La ley de momento flector para la mitad de la estructura, viene dada por:

$$M = NR(1 - \cos q) + M_A - \int_0^q qRd\alpha [R\sin(q - \alpha)]$$

$$M = NR(1 - \cos q) + M_A - qR^2 \int_0^q \sin(q - \alpha)d\alpha$$

$$I_1$$

$$I_1 = \int_0^q (\sin q \cos \alpha - \cos q \sin \alpha)d\alpha = [\sin q \sin \alpha]_0^q + [\cos q \cos \alpha]_0^q$$

$$I_1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \cos \theta \Rightarrow I_1 = 1 - \cos \theta$$

$$\therefore \boxed{M = NR(1 - \cos \theta) + M_A - qR^2 (1 - \cos \theta)} \quad (3)$$

La ley de momento flector para el estado I, viene dada por:

$$M^I = R(1 - \cos \theta) \quad (4)$$

La ley de momento flector para el estado II, viene dada por:

$$M^{II} = 1 \quad (5)$$

Reemplazando (3) y (4) en (1), se tiene:

$$v_A = \frac{1}{EI} \int_0^p [NR(1 - \cos q) + M_A - qR^2 (1 - \cos q)] R(1 - \cos q) R dq = 0$$

$$NR \int_0^p (1 - \cos q)^2 dq + M_A \int_0^p (1 - \cos q) dq - qR^2 \int_0^p (1 - \cos q)^2 dq = 0$$

$$I_2$$

$$I_3$$

$$I_2$$

$$I_2 = \int_0^p (1 - \cos q)^2 dq = \int_0^p (1 - 2 \cos q + \cos^2 q) dq = \left[q - 2 \operatorname{sen} q + \frac{1}{2} (q + \operatorname{sen} q \cos q) \right]_0^p = \frac{3}{2} p$$

$$I_3 = \int_0^p (1 - \cos q) dq = [q - \operatorname{sen} q]_0^p = p$$

$$\therefore \frac{3}{2} NRp + pM_A = \frac{3}{2} p q R^2 \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2} NR + M_A = \frac{3}{2} q R^2} \quad (6)$$

Reemplazando (3) y (5) en (2), se tiene:

$$q_A = \frac{1}{EI} \int_0^p [NR(1 - \cos q) + M_A - qR^2(1 - \cos q)] R dq = 0$$

$$NR \int_0^p (1 - \cos q) dq + M_A \int_0^p dq - qR^2 \int_0^p (1 - \cos q) dq = 0$$

$$\pi NR + \pi M_A - \pi q R^2 = 0 \Rightarrow \boxed{NR + M_A = q R^2} \quad (7)$$

Resolviendo (6) y (7) se tiene:

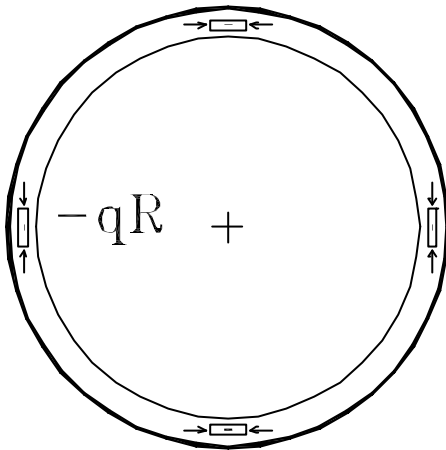
$$\begin{array}{rcl} 1,5NR + M_A = 1,5qR^2 \\ -NR - M_A = -qR^2 \\ \hline 0,5NR = 0,5qR^2 \end{array} \Rightarrow \boxed{N = qR} \quad (8)$$

Reemplazando (8) en (7) :

$$qR^2 + M_A = qR^2 \Rightarrow \boxed{M_A = 0} \quad (9)$$

b)

A partir de (8) y (9), y teniendo en cuenta que la estructura tubular tiene un número infinito de ejes de simetría, sólo estará sometida a un esfuerzo axial de valor qR ; por lo tanto:



Ley de $M_f = 0$

Ley de N